

14

Принцип сжимающих отображений, локальная форма принципа, примеры применения к решению интегральных уравнений

Отobr. $f: M \rightarrow M$ наз-ся **сжимающим**, if $\exists \alpha \in (0, 1): d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \forall x, y \in M$

Утв if $f(x): M \rightarrow M$ сжимающ, то $f(x) \in C$ в $\forall x \in M$

Надо док-ть, что $f(x_n) \rightarrow f(x)$. $d(f(x_n), f(x)) \leq \alpha d(x_n, x) \rightarrow 0$

Принцип сжимающих отображений $\square M$ -полное метр. пр-во. Тогда, if $f: M \rightarrow M$ сжимающ, то $\exists ! x \in M: f(x) = x$.

$\forall x_0 \in M$ пометим $x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$; оценим $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$. И-м, что x_n -фундаментально, оценим

$d(x_n, x_m) = d(x_{n+m}, x_{n+m}) + d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq [\alpha^{n+m-1} + \dots + \alpha^n] d(x_1, x_0)$. Значит,

$d(x_n, x_m) \leq [\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots] d(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$

Таким образом, x_n -фундаментально. $\Rightarrow \exists x: x_n \rightarrow x$,

$x \in M$ (ибо полное) $x_{n+1} = f(x_n)$, устремим $n \rightarrow \infty$:

$x = f(x)$. ~~Утв~~ И-м единственности: $\square \exists \tilde{x}: f(\tilde{x}) = \tilde{x}$,

$d(x, \tilde{x}) > 0; d(x, \tilde{x}) = d(f(x), f(\tilde{x})) \leq \alpha d(x, \tilde{x}) \Rightarrow 1 \leq \alpha$

(?) Ч.П.Д.

$\square M$ -полн. метр. пр-во; $\square f$ задана на замкнутой шаре $B(x_0, r) = \{y: d(x_0, y) \leq r\}$, т.е. $f: B(x_0, r) \rightarrow M$, и f -сжимающ. на $B(x_0, r)$; $d(f(x_0), x_0) \leq (1-\alpha)r$. Тогда в шаре $B(x_0, r) \exists ! f(x) = x$ (дос форма ПКСО)

Покажем, что на самом деле $f: B \rightarrow B(x_0, r)$. Рассмотрим $d(f(x), x_0) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \leq 2d(x, x_0) + (1-d)r \leq 2r + (1-2)r = r$. В качестве $\tilde{M} = \overline{B(x_0, r)}$ - полное метрическое пространство, f -устойчиво. $\Rightarrow \exists! x \in \tilde{M}, f(x) = x$. Ч.т.д.

Примеры (применения к реш-ю Д.У.)

1) $M = C[a, b]$; $d(f, g) = \max_{x \in M} |f(x) - g(x)|$. Р-е уравнение $x(t) = \lambda \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau + y(\tau)$; $x, y \in M$, $K \in C(M \times M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (или комплекс, $\lambda \in \mathbb{C}$). Положим $f(t) = \lambda \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau + y(t)$; $f(t)$ - непрерывная, $f: M \rightarrow M$, $d(f(x_2) - f(x_1)) \leq |\lambda| \int_a^b |K(t, \tau)| \cdot \max_M |x_1 - x_2| d\tau \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq |\lambda| K_0 \cdot d(x_1, x_2) (b-a)$ - сжимающее, если $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$.



2) $x(t) = \lambda \int_a^b K(t, \tau, x(\tau)) d\tau + y(t)$; $x(t) \in C[a, b]$, $y(t) \in C[a, b]$, $K \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R})$; потребуем Lipschitz-условия: $|K(t, \tau, z_2) - K(t, \tau, z_1)| \leq K_0 |z_2 - z_1| \forall z_2, z_1 \in \mathbb{R}, \forall t, \tau \in [a, b]$. Введем отображение $f(x) = \lambda \int_a^b K(t, \tau, x(\tau)) d\tau + y(t)$ легко видеть, что $f: C[a, b] \rightarrow C[a, b] = M$.

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |\lambda \int_a^b [K(t, \tau, x_2(\tau)) - K(t, \tau, x_1(\tau))] d\tau| \leq |\lambda| K_0 (b-a) \max_{[a, b]} |x_2(\tau) - x_1(\tau)| = |\lambda| K_0 (b-a) d(x_1, x_2),$$

т.е. $d(f(x_2), f(x_1)) \leq |\lambda| K_0 (b-a) d(x_2, x_1)$. Это сжимающее, если $|\lambda| K_0 (b-a) < 1$ - т.е. $\exists!$ решение интегрального уравнения.

3) Умножающее уравнение Вольтерра:

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau + y(t); \quad M = C[a, b] \text{ непрерывно,}$$

то для $K(t, \tau) \in C([a, b] \times [a, b]) \Rightarrow |K(t, \tau)| \leq K_0 \forall t, \tau$

$$f: M \rightarrow M \text{ (связно); } |f(x_2) - f(x_1)| \equiv$$

(где $f(x) = \lambda \int_a^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau + y(t)$)

$$\equiv |\lambda| \int_a^t |K(t, \tau) (x_2(\tau) - x_1(\tau))| d\tau \leq |\lambda| K_0 (t-a) \cdot$$

$$\cdot \max_{[a, b]} [x_2(\tau) - x_1(\tau)] = |\lambda| K_0 (t-a) d(x_2, x_1);$$

$$|f^2(x_2) - f^2(x_1)| = |\lambda \int_a^t K(t, \tau) (f(x_2) - f(x_1)) d\tau| \leq$$

$$\leq |\lambda| K_0 \int_a^t |f(x_2) - f(x_1)| d\tau \leq |\lambda|^2 K_0^2 \frac{(t-a)^2}{2} d(x_2, x_1)$$

Поэтому: $|f^m(x_2) - f^m(x_1)| \leq \frac{(K_0 |\lambda|)^m}{m!} (t-a)^m d(x_2, x_1)$

$$\text{т.е. } d(f^m(x_2), f^m(x_1)) \leq \frac{(K_0 |\lambda|)^m}{m!} (b-a)^m d(x_2, x_1)$$

А правая часть при достаточно большом $m < 1 \Rightarrow$
 обратное стремится к нулю. $\Rightarrow \exists! x(t) \in C[a, b]$ -решение
 ур. Вольтерра (для $\forall \lambda \in \mathbb{C}$)